2014 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽試題

________縣市________國民中學____年級 編號：________ 姓名：_________

作答時間: 二 小 時　　　　　　　　　　　　　　　　　　　性別: □男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. .設 $P=2^{103}-1$，則 P 被 5 除的餘數是____________。

答：________________

2. 設 $Q=\dfrac{1-2}{1^2-2^2}+\dfrac{1-2+3}{1^2-2^2+3^2}+\dfrac{1-2+3-4}{1^2-2^2+3^2-4^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1-2+3-4+\ldots+9}{1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+9^2}$，
則 $Q=$____________。

答：________________

3. 已知方程 $x^2+2014^2x+2013\times2015=0$ 有兩個根 α 與 β，若 $\alpha>\beta$，
則 $\alpha=$____________。

答：________________

4. 假設 55 位同學每人各得知一條消息，且任意兩人所得的消息都不相同。他們用電話兩兩互相告訴對方所得知的全部消息。若每次通話都使用 1 分鐘，則至少需要__________分鐘才能使每個人都知道全部的消息。

答：____________分鐘

5. 設 n 為正整數且其正因數的個數恰有 30 個，若其正因數中必有 7、9 與 25，則 n 的所有可能值有________個。

答：____________個

6. 在凸四邊形 $ABCD$ 中，已知 $AB=BC=12$，若 $\angle ABC=100°$ 且 $\angle CDA=130°$，則 BD 之長為__________。

答：________________

7. 在圓形道路上，甲、乙二人分別從 A 點以勻速進行，甲依順時鐘方向先走 4 km，此時乙才依逆時鐘方向出發。當甲共走了 $\dfrac{1}{3}$ 圈之距離時，乙恰好走了 10 km。當乙共走了 $\dfrac{1}{2}$ 圈之距離時，甲恰好共走了 13 km (從出發開始計算)。若當乙第一次走回 A 點時，則甲還要再走_______ km 才會到達 A 點。

答：____________km

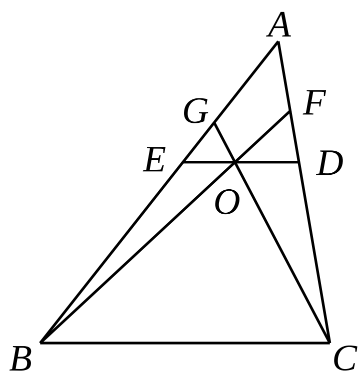
8. 設方程 $xy + 1000z = 2014$ 的正整數解為(x, y, z)，則這些正整數解的個數總共有__________個。

答：__________個

9. 某社團共有 25 位委員，其中任何五位都可以組成一個專門委員會，但是任何二個專門委員會都沒有超過一位相同的委員，則至多可以組成________個專門委員會。

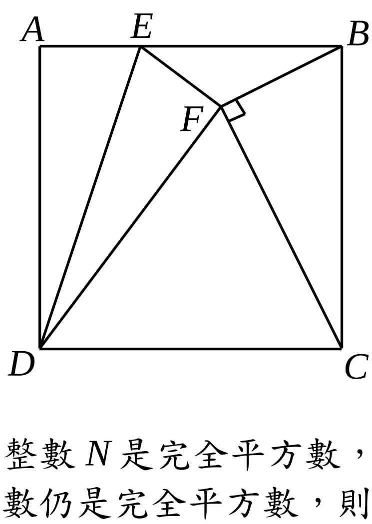
答：__________個

10. 如圖，在$\triangle ABC$中，已知$5AE = 2AB$，$5AD = 2AC$，O為ED線上的一點，連接BO交AC於F，連接CO交AB於G，則$\dfrac{AG}{BG}+\dfrac{AF}{CF}=$__________。



答：__________

11. 如下圖，已知 E 是正方形 $ABCD$ 的 AB 邊一點，設 A 關於 DE 的對稱點為 F，且$\angle BFC = 90°$，則$\dfrac{AB}{AE}$的值為__________。



答：__________

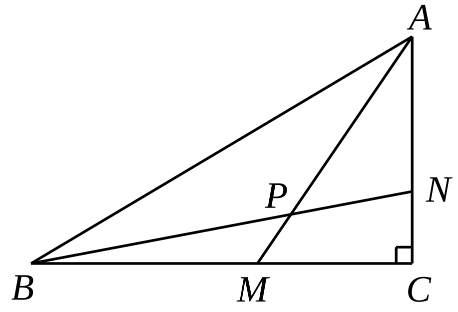
12. 已知正整數 N 是完全平方數，且不以 0 結尾。若移除 N 的末尾兩個數碼後所得的數仍是完全平方數，則具有上述性質的最大正整數 N 是__________。

答：__________

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在試卷上作答，須詳列過程及說明理由)

1. 如下圖，在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，點 M 在 BC 上，且 $BM = AC$ ，點 N 在 AC 上，且 $AN = MC$ ，AM 和 BN 相交於點 P，試證$\angle BPM = 45°$。



2. 從 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 這十個數碼中任意取出三個不同的數碼組成一個三位數。請問所有組成的三位數中有多少個是 3 的倍數？

答：＿＿＿＿＿＿＿＿個

3. 若方程$(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$的兩根都是正整數，試求k所有可能之值。

答：__________________