

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**

# 2014 年青少年數學國際城市邀請賽

## 參賽代表遴選複賽試題

\_\_\_\_\_縣市\_\_\_\_\_國民中學\_\_\_\_\_年級 編號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

作答時間：二小時

性別：男 女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設  $P = 2^{103} - 1$ ，則  $P$  被 5 除的餘數是\_\_\_\_\_。

答：\_\_\_\_\_

2. 設  $Q = \frac{1-2}{1^2-2^2} + \frac{1-2+3}{1^2-2^2+3^2} + \frac{1-2+3-4}{1^2-2^2+3^2-4^2} + \dots + \frac{1-2+3-4+\dots+9}{1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+9^2}$ ，  
則  $Q =$ \_\_\_\_\_。

答：\_\_\_\_\_

3. 已知方程  $x^2 + 2014^2x + 2013 \times 2015 = 0$  有兩個根  $\alpha$  與  $\beta$ ，若  $\alpha > \beta$ ，  
則  $\alpha =$ \_\_\_\_\_。

答：\_\_\_\_\_

4. 假設 55 位同學每人各得知一條消息，且任意兩人所得的消息都不相同。他們用電話兩兩互相告訴對方所得知的全部消息。若每次通話都使用 1 分鐘，則至少需要\_\_\_\_\_分鐘才能使每個人都知道全部的消息。

答：\_\_\_\_\_分鐘

5. 設  $n$  為正整數且其正因數的個數恰有 30 個，若其正因數中必有 7、9 與 25，則  $n$  的所有可能值有\_\_\_\_\_個。

答：\_\_\_\_\_個

6. 在凸四邊形  $ABCD$  中，已知  $AB = BC = 12$ ，若  $\angle ABC = 100^\circ$  且  $\angle CDA = 130^\circ$ ，則  $BD$  之長為\_\_\_\_\_。

答：\_\_\_\_\_

7. 在圓形道路上，甲、乙二人分別從 A 點以勻速進行，甲依順時鐘方向先走 4 km，此時乙才依逆時鐘方向出發。當甲共走了  $\frac{1}{3}$  圈之距離時，乙恰好走了 10 km。當乙共走了  $\frac{1}{2}$  圈之距離時，甲恰好共走了 13 km (從出發開始計算)。若當乙第一次走回 A 點時，則甲還要再走\_\_\_\_\_ km 才會到達 A 點。

答：\_\_\_\_\_ km

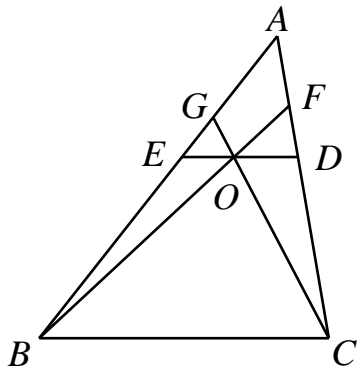
8. 設方程  $xy + 1000z = 2014$  的正整數解為  $(x, y, z)$ ，則這些正整數解的個數總共有\_\_\_\_\_個。

答：\_\_\_\_\_個

9. 某社團共有 25 位委員，其中任何五位都可以組成一個專門委員會，但是任何二個專門委員會都沒有超過一位相同的委員，則至多可以組成\_\_\_\_\_個專門委員會。

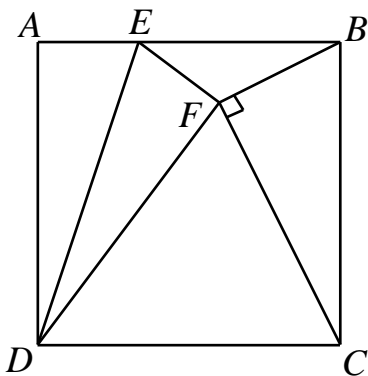
答：\_\_\_\_\_個

10. 如圖，在  $\triangle ABC$  中，已知  $5AE = 2AB$ ， $5AD = 2AC$ ， $O$  為  $ED$  線上的一點，連接  $BO$  交  $AC$  於  $F$ ，連接  $CO$  交  $AB$  於  $G$ ，則  $\frac{AG}{BG} + \frac{AF}{CF} =$ \_\_\_\_\_。



答：\_\_\_\_\_

11. 如下圖，已知  $E$  是正方形  $ABCD$  的  $AB$  邊一點，設  $A$  關於  $DE$  的對稱點為  $F$ ，且  $\angle BFC = 90^\circ$ ，則  $\frac{AB}{AE}$  的值為\_\_\_\_\_。



答：\_\_\_\_\_

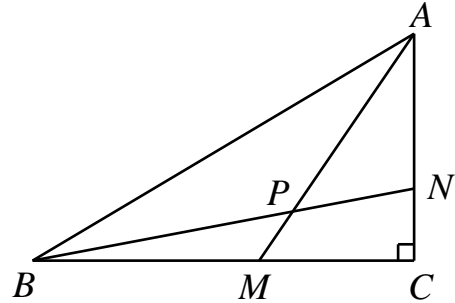
12. 已知正整數  $N$  是完全平方數，且不以 0 結尾。若移除  $N$  的末尾兩個數碼後所得的數仍是完全平方數，則具有上述性質的最大正整數  $N$  是\_\_\_\_\_。

答：\_\_\_\_\_

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在試卷上作答，須詳列過程及說明理由)

1. 如下圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，點  $M$  在  $BC$  上，且  $BM = AC$ ，點  $N$  在  $AC$  上，且  $AN = MC$ ， $AM$  和  $BN$  相交於點  $P$ ，試證  $\angle BPM = 45^\circ$ 。



2. 從 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 這十個數碼中任意取出三個不同的數碼組成一個三位數。請問所有組成的三位數中有多少個是 3 的倍數？

答： \_\_\_\_\_ 個

3. 若方程  $(k^2 - 1)x^2 - 6(3k - 1)x + 72 = 0$  的兩根都是正整數，試求  $k$  所有可能之值。

答：\_\_\_\_\_